

## La « bi-fractalisation » des polyèdres : l'aventure commence !

Les recherches que j'ai engagé sur les rapports étroits qui peuvent exister entre mes travaux en ingénierie systémique relationnelle me conduisent sur un terrain d'intérêt ancien : la géométrie, avec ses apports rigoureux dans le champ des raisonnements qu'elle suppose. Maintenant, il n'est pas spontané d'établir ces liens qui peuvent sembler analogique. Pourtant, dans les temps reculés, ceux des inventeurs des sciences, tels Pythagore<sup>1</sup>, Talés et plus proche encore Poincaré, il était convenu que la pensée pour être bien formée devait apprendre (et s'apprendre) à une rigueur. Quel philosophe a pu négliger ces fondamentaux sans faire de son discours un propos engagé dans des idéologies et de la morale ? Descartes s'est tenu au mieux à cette discipline. Même si l'on peut voir chez Spinoza une volonté de clarifier l'éthique, il a en premier lieu recherché la méthodologie géométrique<sup>2</sup>. Il a toujours été difficile d'établir la rigueur entre le monde des idées qui portent sur les relations interpersonnelles et l'instrument qui supportent les raisonnements. C'est cette voie qui est le creuset de ma recherche et grâce à laquelle j'ai pu fonder la Médiation Professionnelle, avec son ancrage dans la qualité relationnelle – que j'ai décliné en « qualité relationnelle (au travail) », la QR(T).

Le modèle que j'ai choisi pour structurer l'ensemble des outils pratiques de cette méthode de règlement des différends personnels, interpersonnels et organisationnels repose en effet sur une approche tétraédrique (simplifié en triangle, pour le rendu pédagogique plus accessible), d'où mon intérêt spécifique pour ce polyèdre au demeurant structurant. Sans lui, je n'aurais pas pu établir les principes fondamentaux du fonctionnement humain pour piloter une intervention.

Partant du sujet lui-même « Je », incluant l'état variable de la conscience (Cs), j'ai défini ce qui fait l'en-soi (l'harmonisation : H), ce qui fait le soi dans le monde (l'équilibre : E) et l'interaction entre ces deux modes relationnels (la satisfaction : S). Evidemment, la dynamique d'ajustement (ajustativité) se fait à l'insu de toute volonté chez l'individu. Mais l'intervention de la conscience (qui reste un phénomène qui peut se déployer par apprentissage) peut permettre de réguler SHE dans son cerveau. L'ensemble des modalités de réception des informations, de leur traitement réflexif et de leur expression ont trouvé les nuances de la rhétorique pour aider autrui à réviser des positionnements en adversité et s'approprier un apaisement personnel en altérité. C'est un changement qui s'opère en prospectant un autre référentiel. Il transparait de toutes mes interventions professionnelles et expériences personnelles que le plus simple n'est pas nécessairement le plus aisé à comprendre et à s'approprier. La régulation cérébrale œuvre en permanence, bien plus intensément que ne sait le faire la conscience. Celle-ci a une sacrée concurrence avec l'ajustativité naturelle !

Ce n'est pas simple et parfois, j'en conviens aisément, c'est un exploit que d'intervenir sur ses pensées (désirs, aspirations, représentations...). Il faut une instrumentation et c'est cette ingénierie qui est devenu mon centre d'intérêt et dont je vous partage au mieux les avancées, tant dans les formations de médiateur, que dans celles à la qualité relationnelle dispensée par l'école professionnelle de la médiation<sup>3</sup> et de la négociation que j'ai fondée.

---

<sup>1</sup> Connu pour le fameux théorème, mais pas moins reconnu pour être l'inventeur du concept de « philosophie ».

<sup>2</sup> *Ethica Ordine Geometrico Demonstrata* « Éthique démontrée suivant l'ordre des géomètres ».

<sup>3</sup> [www.epmn.fr](http://www.epmn.fr) et pour faire appel à des professionnels de la médiation : [www.cpmn.info](http://www.cpmn.info)

C'est ainsi, dans la lignée de mes prédécesseurs qui ont pensé sans formation académique que je me suis lancé dans cette aventure. Touriste de l'existence, je le suis aussi pour toutes les connaissances scientifiques. Il me faut le dire, au moins pour en indiquer les causes de mes transgressions. Par exemple, la sphère est la plus imparfaite de tous les volumes : affirmer cela permet de revisiter l'ensemble des représentations incluquées. Je ne cherche pas la perfection, seulement ce qui s'ajuste au mieux.

C'est ainsi que j'en viens à des démonstrations sur le volume le plus simple avec lequel il est possible d'ordonner rigoureusement des concepts et d'en faire des suites logiques. Grâce à cela, j'ai déjà publié sur l'encyclopédie des nombres entiers et je poursuis ici cette fantaisie rationnelle<sup>4</sup>.

Je présente ici une suite de nombres entiers (voir fiche plus loin, p.7 et 8) dont l'origine est géométrique, mais dont les implications débordent largement le champ des mathématiques formelles. Elle est issue d'une recherche sur la **fractalisation combinée** d'un polyèdre bien connu depuis Kepler : la **stella octangula**.

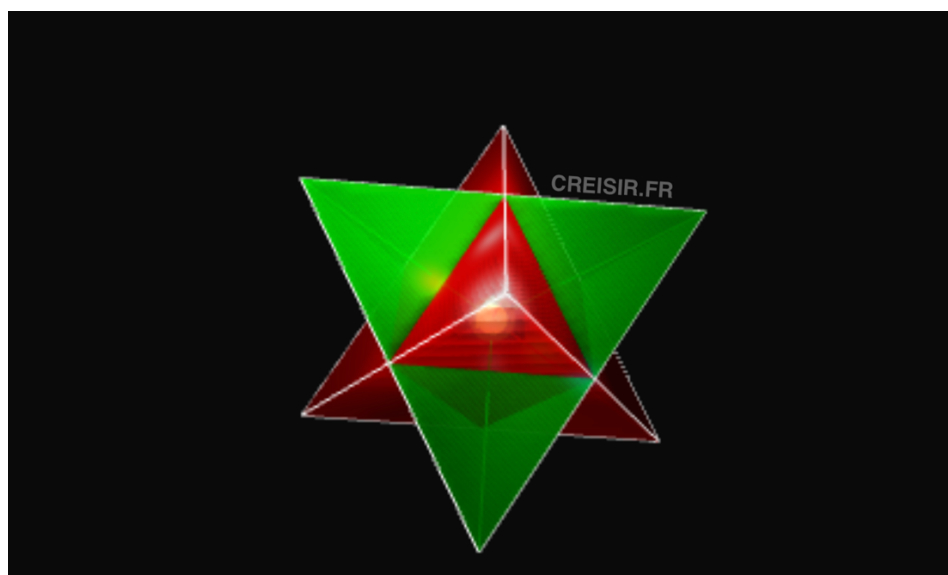


Fig. 1 : Stella Octangula

Pour cette approche qui fait sortir l'objet de son caractère statique, il me fait le renommer en « Bi-tétraèdre stellaire », puisque cette dénomination lui restitue son aspect composite.

<sup>4</sup> Pascal a écrit : « L'un dit que mon sentiment est fantaisie, l'autre que sa fantaisie est sentiment. Il faudrait avoir une règle. La raison s'offre mais elle est ployable à tous sens. Et ainsi il n'y en a point. » Pensées diverses (Laf. 530, Sel. 455). Il ajoutait pour achever l'usage stricte de la raison dans l'approche du monde des idées : « Le cœur a ses raisons que la raison ne connaît point. » (ib. 512) ; « « La raison a beau crier, elle ne peut mettre le prix aux choses. » (188). La polysémie a trompé l'inventeur de la première calculatrice (pascaline 1642). Il n'a pas su faire les distinctions nécessaires, à une époque où la lumière venait des bougies pour sortir d'un obscurantisme millénaire, pour fixer une définition claire de la raison en tant qu'instrument de la rationalité. Sa discussion entre « esprit de géométrie et esprit de finesse » (Pensées, Lafuma 512, Sellier 424) témoigne de cette confusion sémantique de l'époque qui n'était pas facile (encore maintenant) à démêler. Ainsi, j'adopte l'idée de rationalité et le terme de raison, avec l'identification des nuances quand il le faut, avec l'usage du doute rationnel (recherche, analyse...), qu'il faut distinguer du doute émotionnel (crainte, peur...) ou du doute expérientiel (aptitude, compétence...). Aligné dans cette représentation pascalienne, l'humain peut encore sembler paradoxal, alors qu'il est seulement confusionnel, du fait d'un fonctionnement cérébral que la conscience a du mal à piloter.



Fig. 2 : 8 Tétraèdres Stellaire + Octaèdre (composé de 8 tétraèdres) = Bi-Tétraèdre Stellaire

Dans ce contexte, il s'agit à la fois d'un objet central qui est un octaèdre, lequel est composé de 8 tétraèdres, et de 8 tétraèdres qui constituent les branches stellaires. La décomposition pourrait se faire encore différemment, avec une même rigueur géométrique (en 8 bipyramides par exemple - cf. capture d'écran), mais, pour le moment, nous allons nous en tenir à cette première démarche.

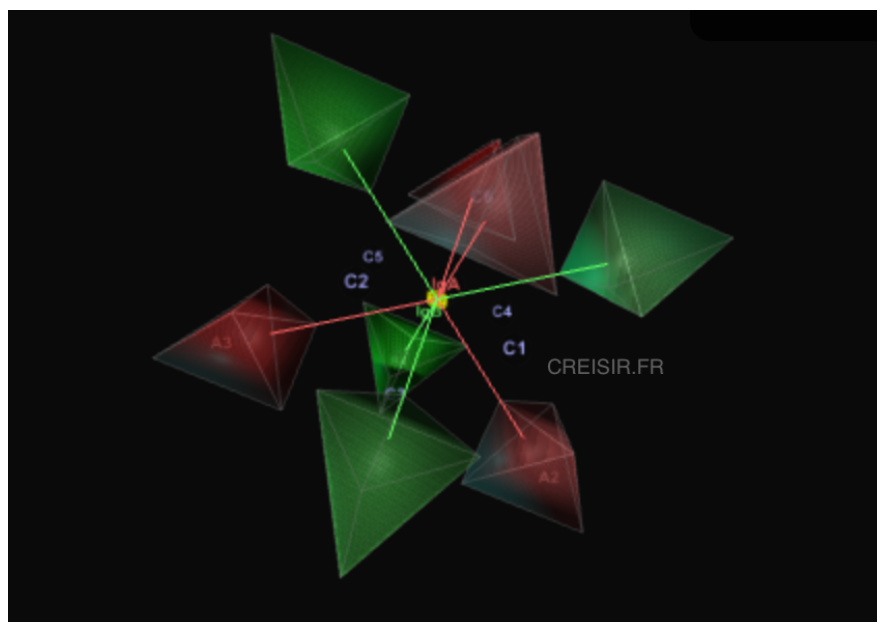


Fig. 3 : Bipyramides Stellaires

De plus, cette approche peut être réalisée avec d'autres polyèdres. J'ouvre des pistes et les confie aux curieux du monde mathématique et géométrique. J'invite aussi les physiciens, les spécialistes des matériaux, à s'intéresser à la chose. L'icosaèdre me semble une bonne bête pour envisager ça, mais aussi les autres formes étoilées (dodécaèdre, cubicoboctaèdre...). De quoi s'éclater !

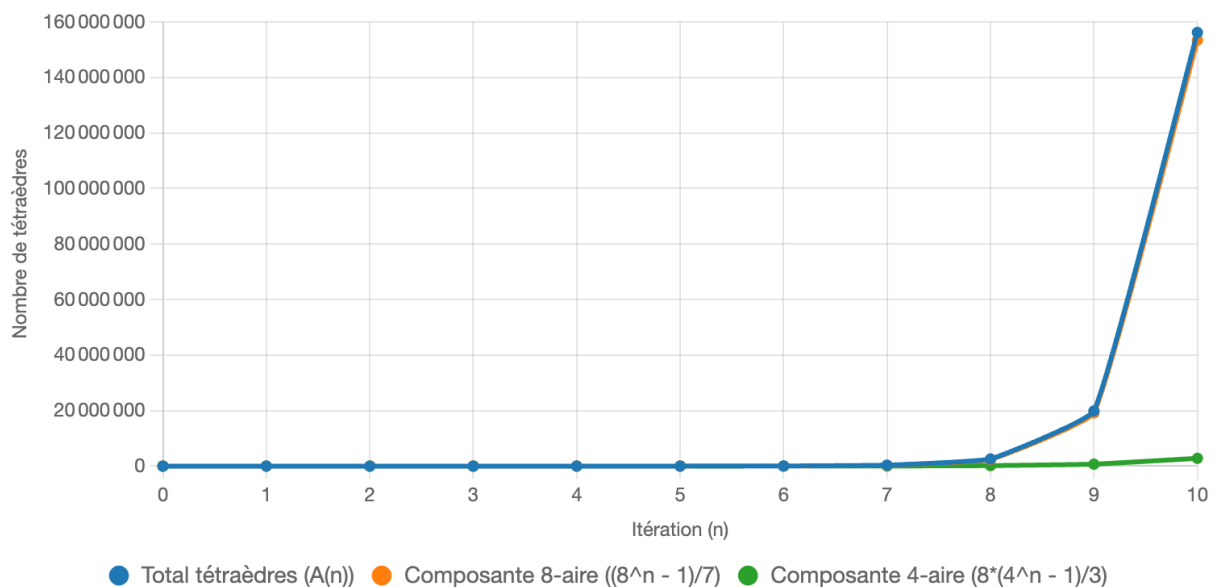
De quoi s'agit-il ici ?

La suite que j'ai soumise à l'OEIS compte le **nombre total de tétraèdres** générés à chaque étape d'une **subdivision récursive** de la stella octangula. Le cœur octaédrique est d'abord décomposé en 8 tétraèdres isocèles. Chacun d'eux est ensuite subdivisé récursivement selon une règle 4-aire, en tétraèdres plus petits.

La suite représente donc le nombre de tétraèdres dans la subdivision bifractale de la stella octangula, composée de deux parties :

- Le terme  $(8^n - 1)/7$  correspond à la croissance arborescente des 8 branches tétraédriques, chaque tétraèdre générant 8 sous-tétraèdres à chaque niveau. Le second terme,  $8 \cdot (4^n - 1)/3$ , correspond à la subdivision récursive en 4 de chacun des 8 tétraèdres issus de l'octaèdre central.
- Le second terme,  $8 \cdot (4^n - 1)/3$ , correspond à la subdivision récursive en 4 de chacun des 8 tétraèdres issus de l'octaèdre central.

### Croissance du nombre de tétraèdres dans la subdivision bifractale de la stella octangula



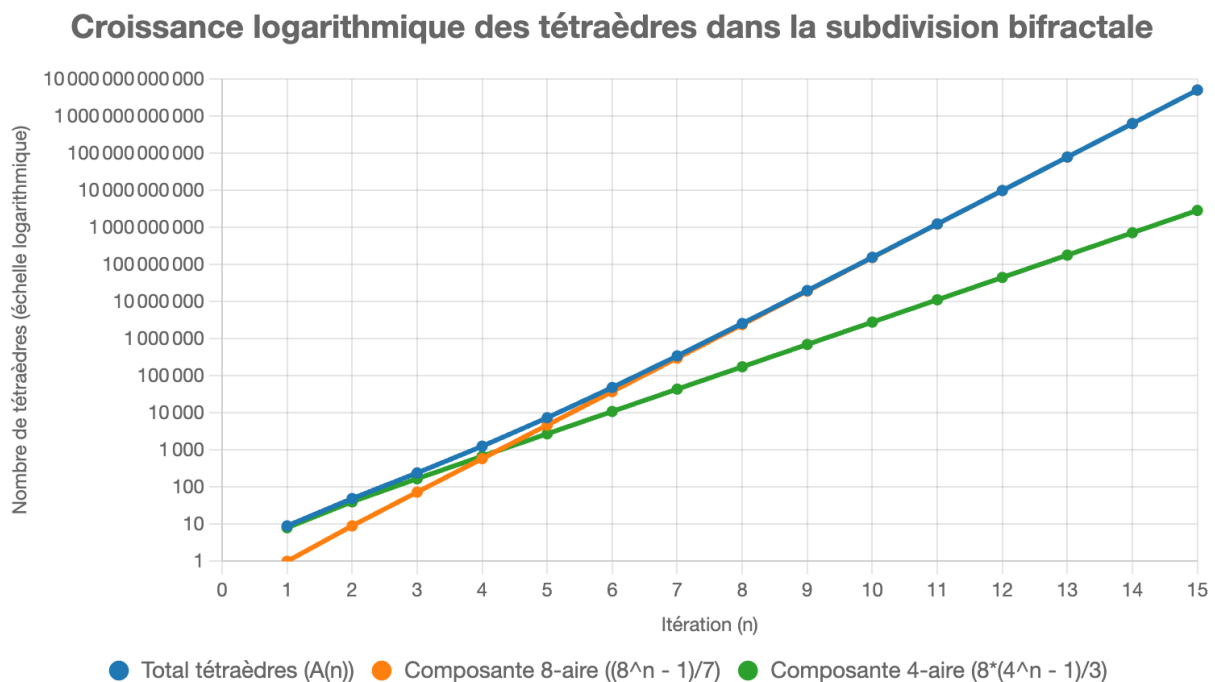
### Explication du graphique

- **Courbe bleue** : Représente la séquence totale  $A(n)$ , c'est-à-dire le nombre total de tétraèdres après  $n$  itérations.
- **Courbe orange** : Montre la composante 8-aire :  $(8^n - 1)/7$ , correspondant à la subdivision des tétraèdres périphériques.
- **Courbe verte** : Illustre la composante 4-aire :  $8 \cdot (4^n - 1)/3$ , correspondant à la subdivision des tétraèdres internes de l'octaèdre central.
- Les valeurs sont calculées directement à partir de la formule pour  $n=0$  à  $n=10$ , car au-delà, les nombres deviennent très grands et risquent de rendre le graphique illisible sans échelle logarithmique.

### Observations

- La composante 8-aire (orange) domine rapidement la croissance, car  $8n$  croît beaucoup plus vite que  $4n$ . Cela reflète le fait que les tétraèdres périphériques se multiplient à un rythme exponentiel plus rapide.
- La composante 4-aire (verte) contribue moins au total, mais reste significative, surtout aux premières itérations.
- La courbe totale (bleue) suit de près la composante 8-aire, ce qui est attendu vu sa dominance.

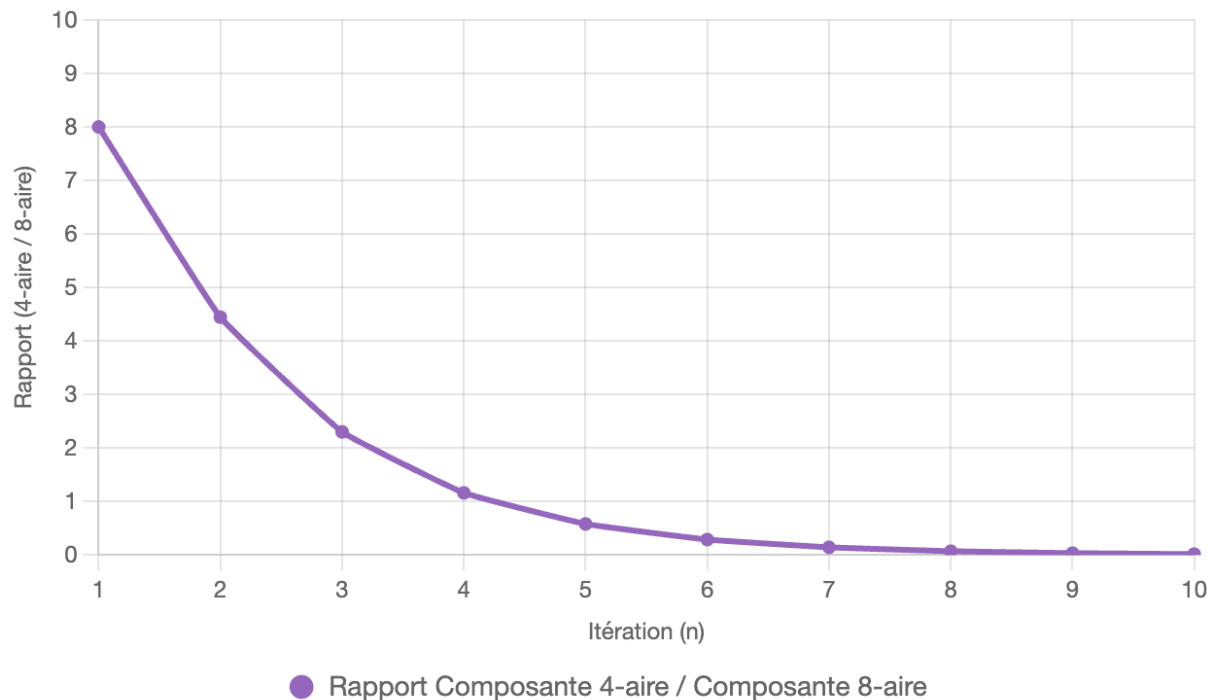
Exemple de graphique en échelle logarithmique pour  $n=0$  à  $n=15$ , pour démontrer la croissance exponentielle



Graph.2

**Interprétation :** Ce graphique (Graph. 2) utilise une échelle logarithmique pour montrer la croissance exponentielle des deux composantes et du total. On voit clairement que la composante 8-aire domine encore plus à mesure que  $n$  augmente.

## Rapport entre composante 4-aire et 8-aire dans la subdivision bifractale



### Interprétation du graphique

Le graphique précédent montre que la composante 4-aire devient négligeable par rapport à la composante 8-aire à mesure que n augmente, confirmant la dominance de la subdivision périphérique. Plus précisément :

- La séquence totale est donnée par  $A(n) = (8^n - 1)/7 + 8 * (4^n - 1)/3$ .
- La composante 8-aire,  $(8^n - 1)/7$ , correspond à la subdivision des tétraèdres périphériques.
- La composante 4-aire,  $8 * (4^n - 1)/3$ , correspond à la subdivision des tétraèdres internes de l'octaèdre central.
- Le rapport entre les deux composantes,  $[8 * (4^n - 1)/3] / [(8^n - 1)/7]$ , tend vers 0, car  $4^n$  croît moins vite que  $8^n$ .

### Dimension fractale

Si la subdivision implique une réduction d'échelle (par exemple, chaque sous-tétraèdre a une longueur d'arête divisée par un facteur k), on peut estimer la dimension fractale des deux composantes :

- Pour la composante 8-aire : si un tétraèdre est divisé en 8 sous-tétraèdres avec un facteur d'échelle  $k = 2$ , la dimension fractale est  $\log(8)/\log(2) = 3$ .
- Pour la composante 4-aire : si un tétraèdre est divisé en 4 sous-tétraèdres avec le même facteur  $k = 2$ , la dimension fractale est  $\log(4)/\log(2) = 2$ . La structure globale aurait une dimension fractale mixte, qui dépend des proportions relatives des deux composantes et des règles géométriques précises de la subdivision. Une analyse plus

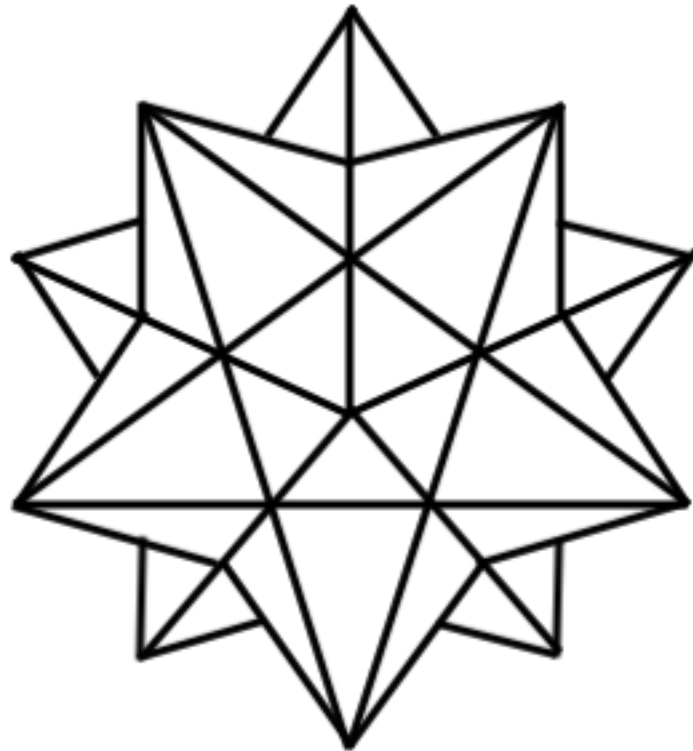
détaillée des facteurs d'échelle et des volumes des sous-tétraèdres est nécessaire pour calculer cette dimension avec précision.

### Applications pratiques

La séquence et la structure bifractale pourraient avoir des applications dans des domaines comme :

- **Modélisation 3D** : Les subdivisions hiérarchiques sont utilisées dans les algorithmes de rendu ou de maillage pour des objets complexes.
- **Cristallographie** : Les structures polyédriques fractales peuvent modéliser des réseaux cristallins ou des matériaux poreux.
- **Optimisation de structures** : Les motifs bifractaux pourraient inspirer des designs légers mais résistants, comme dans l'aéronautique ou l'architecture. Explorer des analogies avec des matériaux fractals (par exemple, mousses ou réseaux polyédriques) pourrait révéler des applications concrètes. Une étude comparative avec d'autres fractals polyédriques, comme le tétraèdre de Sierpinski, serait pertinente.

Exemple d'une source d'inspiration pour la « fractalisation » polyédrique



Le petit dodécaèdre étoilé...

## Dépôt OEIS 3août 2025

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| N°       | A386821                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| NAME     | Total tetrahedra in bifractal subdivision of stella octangula                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| DATA     | 0, 9, 49, 241, 1265, 7409, 48369, 343281, 2571505, 19873009, 156187889, 1238318321, 9861807345, 78715501809, 629008186609, 5029202181361, 40222164204785, 321731500653809, 2573852005230721, 20567853870596009, 164542499901360289, 1316339999210888321, 10530719993687106545, 84245759949496852169, 673966079595974817969, 5391728636767798543841, 43133829094142388350705, 345070632753139106805729, 2760565062025112854449521, 22084520496200902835596169, 176676163969607222684770609, 1413409311756857781478164321, 11307274494054862251825314625, 90458195952438909366106608769, 723665567619511274928852886881                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Offset   | 0,1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Comments | <p>Total number of tetrahedra in a bifractal subdivision of the stella octangula after n iterations.</p> <p>The sequence is the sum of two geometric growth components: one of base 8, the other of base 4. Can be rewritten as <math>A(n) = (2^{(3n)} - 1)/7 + 8 \cdot (2^{(2n)} - 1)/3</math>.</p> <p>The first component, <math>(8^n - 1)/7</math>, corresponds to the 8-ary subdivision of the peripheral tetrahedra (the 8 branches).</p> <p>The second component, <math>8 \cdot (4^n - 1)/3</math>, models the recursive 4-ary subdivision of the 8 tetrahedra composing the central octahedron, each subdivided into 4 tetrahedra at each step.</p> <p>Each tetrahedron is counted individually, without overlaps.</p> <p>The structure preserves octahedral symmetry at every stage.</p> <p>Described in: <a href="https://www.lascoux.com/wp-content/uploads/2025/08/A-Bifractal-Integer-Sequence-from-Recursive-Subdivision-of-the-Stella-Octangula-Jean-Louis-Lascoux.pdf">https://www.lascoux.com/wp-content/uploads/2025/08/A-Bifractal-Integer-Sequence-from-Recursive-Subdivision-of-the-Stella-Octangula-Jean-Louis-Lascoux.pdf</a> Jean-Louis Lascoux, <i>A Bifractal Integer Sequence from Recursive Subdivision of the Stella Octangula</i>, Aug 2025.</p> <p>This sequence equals <math>A023001(n) + 8 \cdot A020988(n)</math>.</p> <p>Where <math>A023001(n) = (8^n - 1)/7</math> (counts the peripheral 8-ary growth), and <math>A020988(n) = (4^n - 1)/3</math> (counts internal 4-ary subdivision terms).</p> <p>Johannes Kepler, <i>Harmonices Mundi</i>, 1619 (stella octangula figure)</p> |

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Links       | Jean-Louis Lascoux, Table of $n$ , $A(n)$ for $n = 0..1000$                                                                                                                                                                                                                                      |
| FORMULA     | $A(n) = (8^n - 1)/7 + 8*(4^n - 1)/3$ , for $n \geq 0$ .<br>$A(n) = (2^{(3n)} - 1)/7 + 8*(2^{(2n)} - 1)/3$ .                                                                                                                                                                                      |
| EXAMPLE     | $A(0) = (8^0 - 1)/7 + 8*(4^0 - 1)/3 = 0/7 + 8*0/3 = 0$ .<br>$A(1) = (8^1 - 1)/7 + 8*(4^1 - 1)/3 = 7/7 + 8*3/3 = 1 + 8 = 9$ .<br>$A(2) = (8^2 - 1)/7 + 8*(4^2 - 1)/3 = 63/7 + 8*15/3 = 9 + 40 = 49$ .<br>$A(3) = (8^3 - 1)/7 + 8*(4^3 - 1)/3 = 511/7 + 8*63/3 = 73 + 168 = 241$ .                 |
| MAPLE       | $A:=n \rightarrow (8^n - 1)/7 + 8*(4^n - 1)/3$ : seq( $A(n)$ , $n=0..34$ );                                                                                                                                                                                                                      |
| MATHEMATICA | Table[( $8^n - 1$ )/7 + $8*(4^n - 1)/3$ , { $n$ , 0, 34}]                                                                                                                                                                                                                                        |
| PROG        | (Python)<br>def A(n): return (8**n - 1)//7 + 8*(4**n - 1)//3<br>print([A(n) for n in range(35)])                                                                                                                                                                                                 |
| CROSSREFS   | Cf. A000420 (powers of 4), A001018 (powers of 8),<br><br>Cf. A020988 (internal subdivision logic, scaled by 8),<br><br>Cf. A023001 (peripheral growth component),<br><br>Cf. A385243 (central 4-ary growth),<br><br>Cf. A386761 (peripheral 8-ary growth component of the same bifractal model). |
| KEYWORD     | nonn,easy                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| AUTHOR      | Jean-Louis Lascoux                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| STATUS      | Proposed                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

## Liens

- Blog : <https://www.lascoux.com/category/mathematiques-geometrie/>
- EOIS : <https://oeis.org/search?q=lascoux+jean-louis - A384306>
- HAL science : [https://hal.science/search/index/q/\\*/authIdHal\\_s/jean-louis-lascoux](https://hal.science/search/index/q/*/authIdHal_s/jean-louis-lascoux)
- ACADEMIA : <https://independent.academia.edu/JeanLouisLascoux>
- VILLAGE DE LA JUSTICE: <https://www.village-justice.com/forum/memberlist.php?mode=viewprofile&u=25400>
- OFFICIEL DE LA MEDIATION : <https://www.officieldelamediation.fr/author/admin/>
- VIAF : <https://viaf.org/fr/viaf/29707237>
- ISNI : <https://isni.org/isni/00000000117545670>
- CAIRN : <https://shs.cairn.info/recherche?lang=fr&term=jean-louis+lascoux>
- BNF : <https://catalogue.bnf.fr/rechercher.do?motRecherche=jean-louis+lascoux+1957>
- IDREF : <https://www.idref.fr/055665233>