

Configurations planes du ruban de Möbius

Planar Folding Möbius Strip - 17 nov. 2025



Jean-Louis Lascoux,

initiateur de la profession de médiateur - médiation professionnelle
Centre de recherche en entente interpersonnelle et sociale et en ingénierie systémique
relationnelle (CREISIR.fr) - EPMN.fr

Préambule	2
Introduction	3
Contexte : deux plis, un croisement, une surface non orientable	4
Construction de la suite : discrétisation rationnelle des axes de pli	4
Pourquoi une suite entière ?	5
Contrainte géométrique de réalisabilité	5
L'intérêt de relier approche lisse et approche discrète	6
Séquence numérique	7
Trois sous-séquences émergentes et développements possibles	9
1. Sous-séquence avec chevauchement : $a_{\text{mathématique}}(n, L)$	9
2. Sous-séquence : $a_{\text{réalisable}}(n, L)$	9
3. Troisième séquence : L_{min} pour chaque configuration	10
Formule L_{min} (initiation du développement)	11
Validation par l'exemple	12
Conclusion	13
Références	14
Projet vidéo : description du processus géométrique, avec suite numérique	15
Le ruban de Möbius devient discret	17
3 étapes	17
La formule magique	17
Conclusion et perspectives	18

Préambule

Je ne fais pas de mathématiques pour les mathématiques. Je m'intéresse à la géométrie, à la logique des combinaisons numériques, parce que l'une et l'autre offrent des chemins flagrants de structuration de la pensée et des voies possibles pour augmenter l'usage de la raison, à condition d'y ajouter la dynamique réflexive et la conscience.

En réalisant mes travaux dans ces domaines, j'observe la possibilité d'extraire des principes de raisonnement géométrique pour les transposer aux relations humaines.

Ainsi, ce travail explore la transposition de principes géométriques rigoureux vers le domaine des relations humaines et de la résolution de conflits. À partir d'un modèle mathématique formel – ici les configurations planes du ruban de Möbius – je cherche à dégager des invariants structurels applicables aux pratiques de l'ingénierie systémique relationnelle® et donc à l'entente sociale.

Cette approche propose un langage formel pour penser et agir sur les relations, en s'appuyant sur des concepts tels que la discrétisation, l'orthogonalité, la contrainte génératrice et la planéité, sans faire de pollution sémantique.

En poursuivant votre lecture, vous entrez dans “Möbiusland” ou “Flat-Möbius World”¹... pour mieux en sortir avec des idées nouvelles...

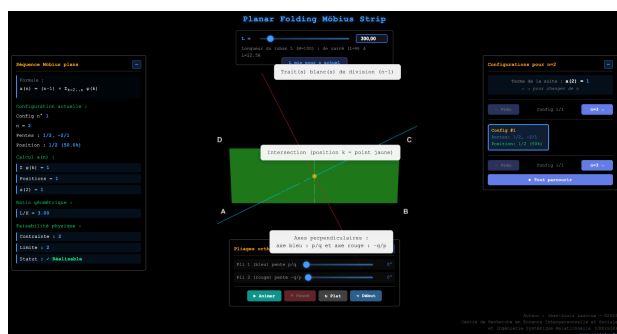


Figure 1 : Interface pour $n=2$, configuration (2, 1/2, 1). $L=300$, $H=100$, ratio $L/H=3.00$. Statut : Réalisable.

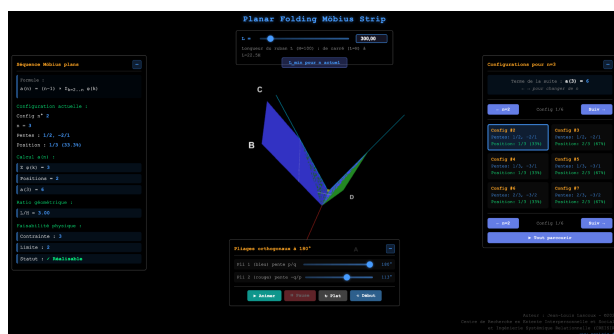


Figure 2 : Visualisation 3D du processus de transformation. Configuration $n=3$, triplet (3, 1/2, 1) en cours de pliage. Pli 1 (bleu) à 180° , Pli 2 (rouge) à 113° .

¹ sans oublier son autre inventeur, Monsieur Listing.

Introduction Le ruban de Möbius est souvent présenté comme un objet continu, lisse, une sorte d'idéal topologique qui aurait pu valoir à l'un de ses inventeurs, l'inventeur du mot de « topologie », Listing, la notoriété de Möbius. Vous pouvez imaginer avoir en main une surface rectangulaire à laquelle on a fait subir une torsion hélicoïdale pour qu'elle n'ait plus qu'un seul bord et un seul côté. La torsion est esthétiquement répartie de manière régulière sur toute la longueur du rectangle. De nombreux chercheurs en géométrie se sont intéressés aux limites de faisabilité. L'image est de ce ruban qui symbolise aussi l'infini est correcte. Cependant, elle ne reflète qu'une seule manière de décrire l'objet. Lorsqu'on cherche à modéliser un ruban réel, pliable, manipulable, la perspective peut changer. On peut rechercher le rapport à son équivalent circulaire, rechercher la tubularité et l'ellipse. Mais, il devient naturel de passer d'une description lisse à une description discrète, fondée sur des opérations géométriques élémentaires. Le travail présenté ici s'inscrit dans ce cadre. Il repose sur un modèle dans lequel un ruban rectangulaire est transformé par une suite de plis, appliqués le long de deux axes orientés. Le résultat, lorsqu'ils se croisent correctement, est une surface plane, mais qui conserve la structure topologique d'un ruban de Möbius. Cette approche produit un ensemble discret de configurations Möbius planes. La suite numérique extraite de cette recherche vise à recenser le nombre de ces configurations pour une discrétisation donnée.	Introduction The Möbius strip is often presented as a continuous, smooth object—a kind of topological ideal that might have earned one of its inventors, the coiner of the word "topology," Listing, the same renown as Möbius. Imagine holding a rectangular surface that has been given a helical twist so that it has only one edge and one side. The twist is aesthetically distributed evenly along the entire length of the rectangle. Many geometry researchers have been interested in the limits of its feasibility. The image of this strip, which also symbolizes infinity, is accurate. However, it reflects only one way of describing the object. When attempting to model a real, foldable, manipulable strip, the perspective can shift. One may explore its relationship to its circular equivalent, or investigate its tubular and elliptical properties. But it becomes natural to move from a smooth description to a discrete one, based on elementary geometric operations. The work presented here fits within this framework. It relies on a model in which a rectangular strip is transformed through a series of folds applied along two oriented axes. The result, when these folds intersect correctly, is a flat surface that nonetheless retains the topological structure of a Möbius strip. This approach yields a discrete set of planar Möbius configurations. The numerical sequence derived from this research aims to enumerate the number of such configurations for a given discretization.
---	---

Contexte : deux plis, un croisement, une surface non orientable

Dans ce modèle, on part d'un rectangle de dimensions $L \times H$.

Deux opérations sont autorisées :

1. Un pli de 180° (rotation totale autour d'une droite interne au rectangle).
2. Un second pli de 180° autour d'une autre droite.

Si ces deux droites se croisent à l'intérieur du rectangle, et si chacune agit sur des moitiés complémentaires du ruban, alors le résultat présente des aspects topologiques similaires à un ruban de Möbius, même si la surface finale est strictement plane.

L'objet obtenu est donc une construction discrète, mais conforme à la caractéristique d'Euler $\chi = 0$.

Dans ce modèle, un pli est défini par :

- une position (où la droite coupe le rectangle),
- une inclinaison,
- et le fait d'être appliqué sur l'un ou l'autre côté de la droite.

Pour compter les configurations distinctes, on peut discrétiser ces paramètres, ce qui conduit à une suite d'entiers.

Construction de la suite : discrétisation rationnelle des axes de pli

La démarche consiste à explorer toutes les possibilités systématiques de pentes d'axes de pli.

Les axes de pli sont des droites dont les pentes sont choisies sous la forme :

$$\tan(\alpha) = p / q$$

où p et q sont deux entiers positifs, premiers entre eux (fractions réduites).

Les pentes orthogonales correspondantes sont données par :

$$\tan(\beta) = -q / p$$

Le comptage repose sur les pentes rationnelles p/q avec $p < q \leq n$, qui sont les mêmes objets arithmétiques que ceux utilisés dans la construction de la [suite de Farey](#).

Propriété remarquable : nombre d'or et fractions de Fibonacci

Les fractions de Fibonacci consécutives (3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, 55/89...) apparaissent naturellement dans cette séquence. Ces fractions, toutes irréductibles, convergent vers $1/\varphi \approx 0.618$, où $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

Pour un "ruban d'or" de proportion $L = \varphi \times H \approx 1.618 \times H$, la pente diagonale vaut $H/L = 1/\varphi$.

Les fractions de Fibonacci approximent cette diagonale avec une précision croissante :

- $3/5 = 0.600$ (erreur 1.8%)
- $5/8 = 0.625$ (erreur 0.7%)
- $8/13 \approx 0.615$ (erreur 0.26%)
- $55/89 \approx 0.618$ (erreur 0.006%)

Pour un entier N donné, on considère toutes les fractions réduites p/q telles que :

$$1 \leq p < q \leq N$$

—

Chaque fraction mène à une configuration plane de type Möbius, dès lors que les deux plis de 180° sont appliqués sur des zones complémentaires du rectangle.

De plus, si l'on discrétise la position des plis en $N-1$ choix possibles sur la longueur du ruban :

$$a(N) = (N-1) * \sum_{k=2..N} \phi(k)$$

où $\phi(k)$ est la fonction indicatrice d'Euler. La quantité

$$\sum_{k=2..N} \phi(k)$$

est liée à la longueur de la suite de Farey, ce qui ancre cette construction dans une structure mathématique solide.

où $\phi(k)$ est la fonction d'Euler.

Le modèle relie :

- la géométrie plane,
- la topologie non orientable,
- et la discrétisation rationnelle des pentes.

Pourquoi une suite entière ?

La suite d'entiers associée donne le nombre de configurations Möbius planes possibles lorsque :

- les pentes des axes de pli sont choisies parmi les fractions réduites $p/q \leq N$;
- les positions des plis sont choisies parmi une discrétisation en $N-1$ pas.

Chaque entier $a(N)$ représente donc la quantité de structures Möbius discrètes distinctes accessibles avec une discrétisation de taille N .

Contrainte géométrique de réalisabilité

Cette suite explore l'univers des possibles topologiques au-delà des limitations physiques. Le cas $L/H^2 = 1$ (carré) est inclus, bien qu'en deçà du seuil $L/H > \sqrt{3}$ requis pour un pliage physique 3D qui constitue l'une des problématiques centrales pour les configurations lisses et discrètes $\chi=0$.

Ici, le plus petit des rubans est, pour $H=1$, $L=2$, car le premier axe de pli qui traverse le ruban de part en part sur les deux longueurs est en diagonale AC et le second pli s'effectue ensuite selon le principe de 180° qui permet au deux largeurs AD et BC de se superposer de manière inversée. Plusieurs configurations ont cette proportion avec $L=2H$.

Pour simplifier le modèle, le point d'intersection est fixé à mi-hauteur ($y=0$ dans un repère centré). Ce choix, motivé par la symétrie géométrique, n'affecte pas les propriétés topologiques : toute autre hauteur fixe donnerait la même séquence numérique.

Un triplet $(n, p/q, k)^3$ est au cœur de cette approche : "*Je découpe un ruban rectangulaire en n morceaux, je trace une ligne de pente p/q , elle croise sa perpendiculaire au même trait.*"

Ainsi, la construction discrète des configurations Möbius planes repose sur la combinatoire des pentes rationnelles p/q et des positions de pliage.

² H =hauteur=largeur=AD et BC ; L =Longueur=AB et CD

³ un triplet identifie univoquement chaque configuration plane de Möbius, soit : n =configuration ; p et q pour les pentes des axes de pliage ; k pour le positionnement variable selon n .

La suite compte les configurations topologiques abstraites définies par des pentes rationnelles, indépendamment des contraintes de réalisabilité géométrique.

Quand on découpe le ruban en n morceaux égaux, on ne retient pas les morceaux, mais les traits de découpe, ce qui fait que les traits sont $n-1$. C'est la combinaison (position, pentes orthogonales) qui crée la diversité.

L'intérêt de relier approche lisse et approche discrète

Le ruban de Möbius "classique" est lisse : sa torsion est continue, et on le décrit par une paramétrisation régulière.

Le modèle présenté ici prend le problème à l'envers :

- il ne suppose aucune courbure,
- il ne suppose aucune torsion,
- il ne suppose aucune régularité lisse.

Tout repose uniquement sur deux opérations discrètes. Pourtant, malgré cette simplicité extrême, les plis reproduisent la même topologie qu'un ruban lisse : un seul bord, un seul côté.

La transposition est donc remarquable :

- L'approche lisse décrit le ruban par continuité (différentiabilité, torsion, courbure).
- L'approche discrète le décrit par une combinatoire d'axes, d'angles et de symétries.

Les deux mondes convergent vers la même structure non orientable, mais par des chemins conceptuels différents. Cette articulation ouvre des pistes nouvelles : modélisation géométrique, théorie des surfaces discrètes, topologie constructive, visualisation pédagogique.

La suite numérique permet de formaliser et d'indexer cette famille d'objets discrets, en offrant un pont clair entre géométrie, arithmétique et topologie.

Séquence numérique

Name	Number of pairs (p/q, k) with $\gcd(p,q)=1$, $1 \leq p < q \leq n$ and $1 \leq k \leq n-1$.
Data	0, 1, 6, 15, 36, 55, 102, 147, 216, 279, 410, 495, 684, 819, 994, 1185, 1520, 1717, 2142, 2413, 2780, 3129, 3762, 4117, 4776, 5275, 5954, 6507, 7532, 8033, 9210, 10013, 10976, 11847, 13022, 13825, 15516, 16613, 17974, 19071, 21160, 22181, 24486, 25929, 27588, 29205, 31970, 33417, 36144, 37877, 40250, 42279, 45812, 47647, 50706, 52965, 55944, 58539, 62930, 64959, 69660, 72651, 76074, 79317, 83648, 86255, 91938, 95475, 99892, 103017, 109410, 112677, 119448, 123735, 128390, 132825, 139156, 142835, 150774, 155235, 161520, 166779, 175562, 179695, 187236, 193035, 200122, 205929, 216040, 220631, 229590, 236145, 244260, 251193, 260662, 266475, 278496, 285471, 294294, 301257
Offset	1
Comments	For a given n, each term $a(n)$ counts pairs $(p/q, k)$ where p/q is a reduced fraction with $1 \leq p < q \leq n$ and k is an integer in $\{1, \dots, n-1\}$. The number of such reduced fractions p/q equals $\text{Sum}_{\{m=2..n\}} \phi(m) = A002088(n) - 1$. This is also the number of interior fractions (excluding $0/1$ and $1/1$) of the Farey sequence of order n. Since k can be chosen independently in $\{1, \dots, n-1\}$, the total count is $a(n) = (n - 1) * (A002088(n) - 1)$. This sequence was first observed in connection with a folding model on an n-unit strip using two perpendicular 180-degree crease directions. The definition given here, however, uses only the arithmetic structure of reduced fractions and the parameter k.
Links	- Jean-Louis Lascoux, Table of n, $a(n)$ for $n = 1..1001$ - Alexander Bogomolny, Farey Series - Jean-Louis Lascoux, Flat-Möbius World - Eric Weisstein's World of Mathematics, Farey Sequence

FORMULA	$a(n) = (n - 1) * \text{Sum}_{\{k=2..n\}} \phi(k).$ $a(n) = (n - 1) * (A002088(n) - 1).$ Asymptotic: $a(n) \sim (3 / \pi^2) * n^3.$
EXAMPLE	n = 6: $\text{sum}_{\{k=2..6\}} \phi(k) = 11$; multiply by $(6-1) = 5$ gives $a(6) = 55.$
MAPLE	with(numtheory): a := n -> (n-1)*add(phi(k), k=2..n): seq(a(n), n=1..40);
MATHEMATICA	a[n_] := (n - 1) * Sum[EulerPhi[k], {k, 2, n}]; Array[a, 40, 1]
PROG	(Python) import sympy as sp def a(n): return (n-1)*sum(sp.totient(k) for k in range(2, n+1)) print([a(n) for n in range(1, 41)]) (PARI) a(n)=my(s=0); for(k=2, n, s+=eulerphi(k)); (n-1)*s; vector(40, j, a(j))
CROSSREFS	Cf. A000010 , A002088 .
KEYWORD	nonn, easy
AUTHOR	Jean-Louis Lascoux , Nov 16 2025

Trois sous-séquences émergentes et développements possibles

La séquence principale $a(n) = (n-1) \times \sum_{k=2..n} \varphi(k)$ compte toutes les configurations topologiques (n , p/q , position) sans considération de réalisabilité physique. Elle représente l'espace total des possibles topologiques $\chi=0$ planes.

À chaque finesse de découpage (n), on combine une inclinaison simple du premier pli, son pli perpendiculaire, et l'un des $n-1$ points d'intersection possibles. Chaque combinaison donne un ruban de Möbius plat. La suite numérique dit combien il y en a.

Propriétés :

- Croissance asymptotique : $a(n) \sim (3/\pi^2) \times n^3$
- Lien direct avec A002088 (sommées cumulées de la fonction d'Euler)

Trois objets mathématiques distincts émergent dès lors qu'on introduit une contrainte géométrique de réalisabilité physique. On peut donc déjà identifier les configurations où les chevauchements structurels rendent complexes les finalisations de fermeture par les contacts bord-à-bord et les configurations dont les bord-à-bord sont directs.

1. Sous-séquence avec chevauchement : $a_{\text{mathématique}}(n, L)$

Cette sous-séquence concerne les configurations où l'axe passe par AD (gauche) ou BC (droite), générant un chevauchement des pliages.

Relation de complément :

$$a(n) = a_{\text{réalisable}}(n, L) + a_{\text{mathématique}}(n, L)$$

Propriétés :

- Décroît avec L
- Pour $L \rightarrow \infty$, $a_{\text{mathématique}}(n, L) \rightarrow 0$
- Représente les configurations "topologiquement valides mais géométriquement impossibles"

2. Sous-séquence : $a_{\text{réalisable}}(n, L)$

Et donc, la sous-séquence dont le bord-à-bord est direct. Pour un ratio L/H fixé, cette sous-séquence compte les configurations où l'axe bleu entre par AB (bas) et sort par CD (haut), ce qui garantit une absence de chevauchement des pliages.

Propriétés :

- Dépend du ratio L/H choisi
- $a_{\text{réalisable}}(n, L) \leq a(n)$
- Croît avec L : plus le ruban est long, plus de configurations deviennent réalisables

Développements possibles :

—

1. Établir une formule explicite de $a_{\text{réalisable}}(n, L)$ en fonction de L/H
2. Étudier la proportion asymptotique $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\text{réalisable}}(n, L)/a(n)$
3. Identifier les valeurs critiques de L où $a_{\text{réalisable}}$ fait des "sauts"
4. Analyser la distribution des fractions p/q dans les configurations réalisables

3. Troisième séquence : L_{min} pour chaque configuration

Une autre sous-séquence apparaît dans ce jeu mathématique et géométrique, celui qui consiste à identifier les longueurs minimales pour chaque configuration de tous les " n ". Ainsi, pour chaque configuration $i \in [1..a(n)]$, la longueur minimale est donnée par :

$$L_{\text{min}}(n, p/q, \text{position}) = H \times (q/p) \times (1 + |2 \times \text{position} - n|/n)$$

Caractéristiques remarquables :

a) Dépendance à la pente p/q

- Le facteur q/p est l'inverse de la pente de l'axe bleu
- Pente faible (p petit) $\rightarrow L_{\text{min}}$ grand
- Pente proche de 1 ($p \approx q$) $\rightarrow L_{\text{min}}$ petit

Cette troisième séquence fait apparaître une constante dans le rapport à la diagonale... et parfois à la quasi-diagonale.

b) Cas particuliers : configurations quasi-diagonales

Les ratios de Fibonacci donnent les L_{min} les plus petits :

- $1/2 \rightarrow L_{\text{min}} = 2H$
- $2/3 \rightarrow L_{\text{min}} = 1.5H$
- $3/5 \rightarrow L_{\text{min}} \approx 1.67H$
- $5/8 \rightarrow L_{\text{min}} = 1.6H$
- $8/13 \rightarrow L_{\text{min}} \approx 1.625H$

Ces fractions approximent $1/\phi \approx 0.618$ (nombre d'or).

c) Structure hiérarchique

Pour un n donné, les configurations s'ordonnent naturellement par L_{min} croissant, formant une structure en "couches" :

- Noyau réalisable : fractions proches de 1
- Couronne abstraite : fractions éloignées de 1

d) Influence de la position

Le terme $(1 + |2 \times \text{position} - n|/n)$ module L_{min} :

- Position centrale : facteur ≈ 1 (L_{min} minimal)
- Positions extrêmes : facteur ≈ 2 (L_{min} maximal)

—

Développements possibles pour la séquence $L_{\min}$:

Le chemin peut-être prometteur, mais je le laisse ouvert à ceux qui pourraient y voir un intérêt pour quelques applications dont j'ignore le contexte.

1. Calcul explicite pour chaque n

- Générer la liste complète $L_{\min}(1), L_{\min}(2), \dots, L_{\min}(a(n))$
- Exemple pour $n=6$: 55 valeurs à calculer
- Ordonner par valeurs croissantes

2. Analyse statistique

- Distribution de $L_{\min}$ pour un n donné
- Valeur minimale (toujours avec fraction proche de 1)
- Valeur maximale (avec $1/n$ en position extrême)
- Médiane, quartiles, concentration

3. Séquence des minima

- Pour chaque n , extraire $\min(L_{\min}) \rightarrow$ nouvelle suite
- Identifier la fraction optimale pour chaque n
- Lien avec les approximations du nombre d'or

4. Comptage par seuils

- Pour L fixé, combien de configurations ont $L_{\min} \leq L$?
- Fonction en escalier : $a_{\text{réalisable}}(n, L) = \#\{i : L_{\min}(i) \leq L\}$
- Étudier les "marches" de cette fonction

5. Indexation double

- Créer une matrice $L_{\min}[n, i]$ pour $n \in [2..N]$ et $i \in [1..a(n)]$
- Visualiser la structure globale
- Identifier les motifs récurrents

Formule $L_{\min}$ (initiation du développement)

Définition : pour une configuration $(n, p/q, \text{position})$ avec H fixé, la longueur minimale est :

$$L_{\min} = H \times (q/p) \times (1 + |2 \times \text{position} - n|/n)$$

Démonstration

Repère centré : Origine au centre, $x \in [-L/2, L/2]$, $y \in [-H/2, H/2]$

Axe bleu de pente p/q passe par le point $I = (x_I, 0)$ avec :

$$x_I = (\text{position}/n - 1/2) \times L$$

Équation : $y = (p/q)(x - x_I) \rightarrow y = (p/q)(x - x_I)$

Points d'intersection avec AB et CD :

$$AB (y = -H/2) : x_1 = x_I - (q/p)(H/2)$$

$$CD (y = H/2) : x_2 = x_I + (q/p)(H/2)$$

Condition de réalisabilité (l'axe ne sort pas par AD ou BC) :

$$-L/2 \leq x_1 \text{ et } x_2 \leq L/2$$

—

Contrainte critique :

Remplaçons x_l :

$$x_1 = [(position/n - 1/2)L] - (q/p)(H/2)$$

$$x_2 = [(position/n - 1/2)L] + (q/p)(H/2)$$

La contrainte active est :

$$\max(|x_1|, |x_2|) = L/2$$

Calcul de $\max(|x_1|, |x_2|)$:

$$|x_1| = |x_l - (q/p)(H/2)|$$

$$|x_2| = |x_l + (q/p)(H/2)|$$

$$\max(|x_1|, |x_2|) = |x_l| + (q/p)(H/2)$$

En conséquence :

$$|x_l| + (q/p)(H/2) = L/2$$

Remplaçons x_l :

$$|position/n - 1/2| \times L + (q/p)(H/2) = L/2$$

$$L \times |position/n - 1/2| = L/2 - (q/p)(H/2)$$

$$L \times [1/2 - |position/n - 1/2|] = (q/p)(H/2)$$

$$L = H \times (q/p) / [1 - 2|position/n - 1/2|]$$

Dénominateur :

$$1 - 2|position/n - 1/2| = 1 - |(2 \times position - n)/n|$$

$$= [n - |2 \times position - n|] / n$$

Donc :

$$L_{\min} = H \times (q/p) \times n / [n - |2 \times position - n|]$$

$$= H \times (q/p) \times (1 + |2 \times position - n|/n)$$

Validation par l'exemple

Config $n=6$, $p/q=3/4$, $position=3$, $H=100$:

$$L_{\min} = 100 \times (4/3) \times (1 + |6-6|/6) = 133.33$$

Vérification : $x_l = 0$, $x_1 = -66.67$, $x_2 = 66.67 \rightarrow$ besoin $L \geq 133.33$

—

Conclusion

On peut constater que l'habitude d'aborder un sujet d'une certaine manière tend à faire penser que les règles adoptées sont celles qui s'imposent par nature. Ainsi, l'approche lisse du ruban de Listing-Möbius est une de ces habitudes. Pour autant, dans le même genre, les règles relationnelles ne sont pas des carcans, mais des axes de pli qui permettent de transformer une surface plane (individualités séparées) en structure non-orientable (entente collective où chacun est relié).

Ce travail établit un pont original entre trois domaines mathématiques habituellement distincts :

- **Théorie des nombres** (fonction d'Euler $\varphi(k)$, fractions irréductibles)
- **Topologie** (surfaces non-orientables, caractéristique d'Euler $\chi=0$)
- **Géométrie constructive** (plis orthogonaux, planéité stricte)

La formule $a(n) = (n-1) \times \sum_{k=2..n} \varphi(k)$ relie de manière explicite et calculable un problème de comptage topologique à une structure arithmétique fondamentale.

Aucune recherche connue ne combine simultanément ces domaines. Les domaines proches (origami computationnel, théorie des nœuds, pavages, suites de Farey) n'intègrent jamais l'ensemble de ces aspects qui participent de la conduite d'un raisonnement global.

Au-delà de l'intérêt mathématique intrinsèque, ce modèle propose un langage formel pour penser la structure des relations. Les concepts de discrétisation (positions finies), d'orthogonalité (croisement sans soumission), de contrainte génératrice (cadre qui libère) et de planéité (égalité structurelle) offrent des invariants transposables à l'entente sociale et à la résolution de conflits.

Cette articulation entre rigueur géométrique et applications humaines n'est pas métaphorique mais **analogique** : elle identifie des principes structurels communs à différents domaines de la réalité, pour conduire des raisonnements :

- Le phénomène d'orthogonalité est intéressant parce qu'il permet entre affirmation de soi et altérité. Ni soumission (parallélisme), ni affrontement (opposition frontale), mais croisement perpendiculaire.
- Dans un conflit à n parties, il y a $n-1$ interfaces à travailler. Mais c'est sur les points de jonction que se construit (ou se défait) l'entente sociale, autrement dit, c'est sur ce qui fait, ce que fait et ceux qui font la relation, plutôt que sur les enjeux et les intérêts.
- L'identification de ce qui a fait les marques dans une relation (plis successifs) tout en restant axé sur une perspective qualitative, permet de revenir sur les phénomènes de dispersion. Plus on introduit de nuances dans une distorsion relationnelle, plus l'espace des solutions croît exponentiellement (comme n^3).
- Un différend ne peut se résoudre que si les positions sont rationalisables (mises en fraction : "je veux X pour Y raisons"). Les positions purement émotionnelles (irrationnelles) doivent d'abord être traduites en pentes rationnelles.
- La planéité est l'équivalent géométrique de l'altérité. Tout doit se jouer sur un plan identique, sans domination (élévation d'une partie au-dessus de l'autre).

Les relations humaines, comme les objets géométriques, obéissent à des lois structurelles. Identifier ces lois permet de passer d'une pratique intuitive à une ingénierie systémique de l'entente sociale.

On peut alors envisager une géométrie sociale opératoire, sans faire perdre la moindre extraordinarité à chaque existence humaine et à chacun de ses moments. Cette approche n'est pas un réductionnisme : formaliser les structures relationnelles n'annule en rien la singularité de chaque conscience. Comme le ruban de Möbius conserve sa topologie tout en admettant des réalisations géométriques multiples, l'ingénierie sociale peut structurer l'entente collective sans dissoudre l'expérience vécue. La géométrie n'éteint pas la conscience ; elle en propose une lisibilité opératoire.

Références

- (1)  Théorème de la Construction Barycentrique du Ruban de Listing-Möbius , Jean-Louis Lascoux, Creisir - Nov. 2025
- (2) [Vidéo de présentation sommaire de l'algorithme](https://youtu.be/Yvip5HGTsic), Jean-Louis Lascoux, -4mn, nov. 2025
<https://youtu.be/Yvip5HGTsic>

Projet vidéo : description du processus géométrique, avec suite numérique

Objectif : Identifier le séquençement des configurations de pliages permettant d'obtenir une surface non-orientable de type Möbius, tout en restant strictement plane. Donc, je prends un ruban de papier rectangulaire ABCD...

Processus en 7 étapes

1. **Discrétisation de la longueur** : Je découpe conceptuellement le ruban en n segments égaux le long de sa longueur L . Cela crée $n-1$ traits de jonction (lignes verticales), qui servent de repères de positionnement pour l'intersection des axes de pli. Exemples : Pour $n=2$, j'obtiens 1 trait à la position $L/2$ et Pour $n=3$, j'obtiens 2 traits aux positions $L/3$ et $2L/3$, etc.
2. **Convention sur la hauteur** : Je fixe conventionnellement que le point d'intersection des deux axes de pli se situera toujours à mi-hauteur du ruban ($y=0$ dans un repère centré sur le rectangle). Ce choix, motivé par la symétrie, n'affecte pas les propriétés topologiques.
3. **Choix des pentes rationnelles** : Pour le premier axe de pli, je choisis une pente rationnelle p/q avec p et q entiers positifs premiers entre eux (fraction réduite), $1 \leq p < q \leq n$ (pente strictement inférieure à 1). Sont donc exclus :
 - Les plis horizontaux (pente 0)
 - Les plis verticaux (pente infinie)
 - Les plis à 45° ou plus raides ($p \geq q$)
4. **Pente perpendiculaire** : Le second axe de pli doit être perpendiculaire au premier. Sa pente est donc automatiquement : $-q/p$. Vérification de l'orthogonalité : $(p/q) \times (-q/p) = -1$ ✓
5. **Positionnement de l'intersection** : Le point d'intersection des deux axes est placé sur l'un des $n-1$ traits de jonction, repéré par son indice k ($k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$). Position du point :
 - Horizontale : $x = k/n \times L$
 - Verticale : $y = 0$ (fixe, mi-hauteur)
6. **Opérations de pliage** : J'effectue deux pliages successifs à 180° :
 - Premier pli : rotation complète (180°) autour de l'axe de pente p/q
 - Second pli : rotation complète (180°) autour de l'axe de pente $-q/p$
7. **Résultat et identification** : Le ruban transformé possède les propriétés topologiques d'un ruban de Möbius :
 - Un seul bord continu
 - Une seule face (surface non-orientable)
 - Caractéristique d'Euler $\chi = 0$
 - Planéité stricte

Chaque configuration est identifiée par le triplet $(n, p/q, k)$:

- n : finesse de discrétisation
- p/q : pente du premier axe
- k : indice du trait de jonction marquant la position de l'intersection

Formule de comptage (Nombre de configurations pour un niveau n) :

$$\bullet \quad a(n) = (n-1) \times \sum_{i=2}^n \varphi(i)$$

où $\varphi(i)$ est la fonction d'Euler.

Séquence numérique

- $n=1$: 0 configuration
- $n=2$: 1 configuration
- $n=3$: 6 configurations
- $n=4$: 15 configurations
- $n=5$: 36 configurations
- $n=6$: 55 configurations
- ...

Cette suite énumère l'ensemble des configurations de Möbius plans constructibles par pliages orthogonaux à pentes rationnelles.

Le ruban de Möbius devient discret

Identification des deux plis d'une courbe continue...

Vous connaissez le ruban de Möbius : une bande de papier dont on colle les deux largeurs opposées après avoir appliqué une torsion pour inverser les angles opposés. Résultat : le ruban fermé a une face et un bord. Il est lisse et continu. Mon approche est différente: je plie. Cette idée vient de mon intérêt pour la structure tétraédrique : un triangle qu'on enfonce pour obtenir une pyramide. Je n'en retiens que les arêtes. De la démultiplication tétraédrique, le jeu des fractales, le déploiement par la stella-octangula qui fait émerger un bi-tétraèdre stellaire, le ruban qui symbolise l'infini est étroitement lié à cette modélisation. Il s'agit ici de passer de quelque chose que l'on décrit à quelque chose que l'on calcule ; de quelque chose que l'on qualifie à quelque chose que l'on quantifie. Ainsi, il s'agit de passer d'un discours sensoriel et sensitif à quelque chose de différencié, d'énuméré. C'est cette même logique qui permet d'envisager de générer une séquence entière (des nombres) à partir d'une intuition géométrique (une structure). Nous partons de deux plis nets, à 180° , selon des règles précises. Le résultat ? Le même objet topologique d'un ruban connu des artisans médiévaux pour entraîner des poulies, mais strictement plat.

Cette recherche démontre qu'on peut créer un ruban de Möbius sans courbure, uniquement par pliages orthogonaux. Et surtout, elle compte le nombre de façons différentes.

3 étapes

1. Un rectangle de papier : prenez un rectangle. Longueur L , hauteur H . Tracez des lignes verticales pour le diviser en n morceaux égaux. Ces traits serviront de repères.

2. Deux plis perpendiculaires

- Tracez une première ligne oblique (pente p/q , fraction irréductible)
- Tracez sa perpendiculaire (pente $-q/p$)
- Ces deux lignes se croisent sur l'un des $n-1$ traits verticaux
- Pliez à 180° le long de chaque axe

3. Résultat : Möbius plat, après ces deux pliages, vous obtenez une surface avec un seul bord et un seul côté. C'est topologiquement un ruban de Möbius, mais **entièrement plat**.

La formule magique

Le nombre de configurations possibles pour un niveau n est donné par : $a(n) = (n-1) \times \sum \varphi(k)$ pour k de 2 à n où $\varphi(k)$ est la fonction d'Euler (qui compte les nombres premiers avec k). La croissance suit n^3 , ce qui signifie qu'en doublant la finesse, on multiplie par 8 les possibilités.

Exemples concrets :

- $n=2 \rightarrow 1$ configuration
- $n=3 \rightarrow 6$ configurations

- $n=100 \rightarrow 30$ millions de configurations

Chaque configuration est identifiée par un triplet $(n, p/q, k_position)$.

L'outil développé permet d'explorer les 500 premières configurations, d'animer les pliages en temps réel, de voir quelles configurations sont physiquement réalisables, de calculer la longueur minimale L_min pour chaque cas, de comprendre visuellement les contraintes géométriques. De quoi réfléchir en transposant les raisonnements.

Au-delà de l'élégance mathématique, ce modèle offre un langage formel pour penser les relations et constater qu'en cultivant la rigueur géométrique des raisonnements, il est possible de mieux approcher ce que l'on ne comprend pas dans les relations intimes, interpersonnelles et organisationnelles.

Ainsi, si je fais des mathématiques et de la géométrie, c'est pour la démonstration qu'il est possible de développer une pensée structurante dans un domaine où la fantaisie mystique, l'élucubration des pseudosciences, les biais des traditions culturelles se conjuguent pour façonner les tabous, les interdits et limitations d'un exercice intelligent de la liberté.

Conclusion et perspectives

La proposition centrale : les relations humaines, comme les objets géométriques, obéissent à des lois structurelles. Identifier ces lois permet de passer d'une pratique intuitive à une ingénierie rigoureuse de l'entente sociale.

Pour aller plus loin :

- Visualisation interactive : *Flat-Möbius World* (algorithme des 500 configurations)
- Séquence OEIS A385682 : référence mathématique officielle
- Article complet : *Configurations planes du ruban de Möbius* (Jean-Louis Lascoux, nov. 2025)

"Formaliser les structures relationnelles n'annule en rien la singularité de chaque conscience. Comme le ruban de Möbius conserve sa topologie tout en admettant des réalisations géométriques multiples, l'ingénierie sociale peut structurer l'entente collective sans dissoudre l'expérience vécue."