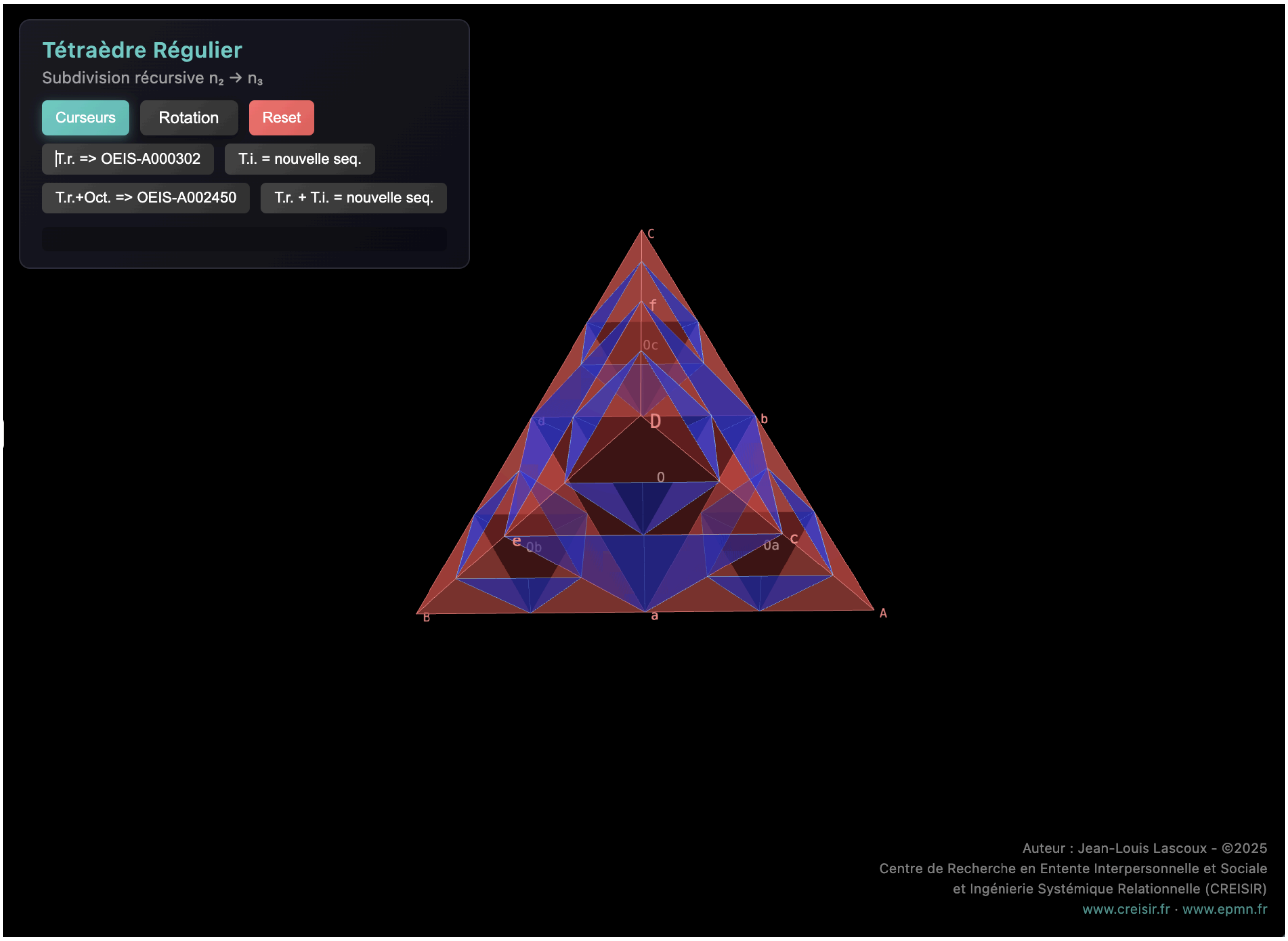
Subdivision tétraédrique

Combinaison de tétraèdres et d'octaèdres



Jean-Louis Lascoux (-)

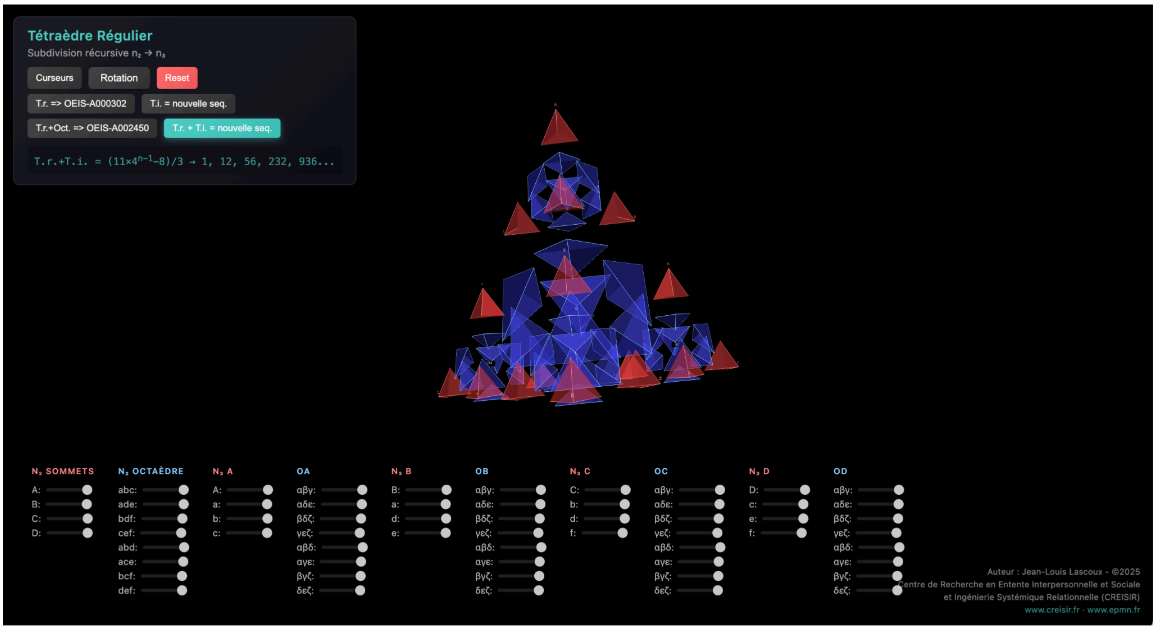
Centre de recherche en entente interpersonnelle et sociale et en ingénierie systémique relationnelle (CREISIR.fr) - EPMN.fr

Autres publications de l'auteur : OEIS A384306 et A385682

Préface

La subdivision d'un tétraèdre régulier par les milieux de ses arêtes génère une structure récursive dont les éléments — tétraèdres réguliers, octaèdres, tétraèdres irréguliers — suivent des progressions numériques précises. Certaines correspondent à des suites déjà répertoriées dans l'OEIS, d'autres sont nouvelles.

Cette exploration géométrique illustre une démarche transversale : les mêmes logiques structurelles se retrouvent dans des domaines distincts. Ce document présente ces suites, leurs formules et leurs relations.



Suites numériques de la subdivision tétraédrique =>

Cette configuration géométrique permet d’observer que la logique des développements structurels ont déjà des correspondances dans les suites numériques référencées sur OEIS.

Principe géométrique

Un tétraèdre régulier peut être subdivisé en reliant les milieux de ses six arêtes. Cette opération produit :

- **4 tétraèdres réguliers** aux sommets (arête = moitié de l'original)
- **1 octaèdre régulier** au centre

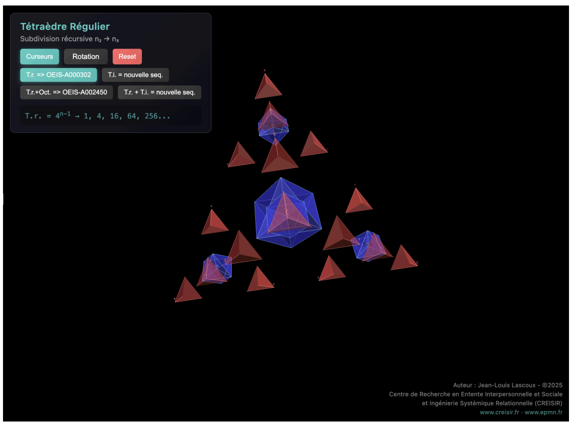
L'octaèdre central peut lui-même être décomposé en **8 tétraèdres irréguliers** partageant un sommet commun au centre de l'octaèdre.

La subdivision s'applique récursivement aux seuls tétraèdres réguliers. Les tétraèdres irréguliers et les octaèdres (selon le mode de comptage) restent inchangés et s'accumulent.

Vision 1 : Comptage par éléments distincts (tétraèdres réguliers + octaèdres)

Dans cette vision, l'octaèdre central est considéré comme une unité indivisible.

<table>
<tr><th>Niveau n</th><th>Tétraèdres réguliers Tn</th><th>Octaèdres On</th><th>Total En</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>16</td><td>5</td><td>21</td></tr>
<tr><td>4</td><td>64</td><td>21</td><td>85</td></tr>
<tr><td>5</td><td>256</td><td>85</td><td>341</td></tr>
<tr><td>Suites</td><td>A000302 (puissances de 4)</td><td>A002450 décalée ((4^(n-1) - 1)/3</td><td>A002450 ((4^n - 1)/3, nombres de Mersenne en base 4)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formules
• Tn = 4^(n-1)
• On = (4^(n-1) - 1) / 3
• En = Tn + On = (4^n - 1) / 3

Récurrences
• T(n+1) = 4 × Tn avec T1 = 1
• O(n+1) = On + Tn avec O1 = 0</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Vision 2 : Comptage par tétraèdres uniquement (réguliers + irréguliers)

Dans cette vision, chaque octaèdre est subdivisé en 8 tétraèdres irréguliers ayant pour sommet commun le centre de l'octaèdre.

Niveau n	**Tétraèdres réguliers Tn**	**Tétraèdres irréguliers In**	**Total Sn**
1	1	0	1
2	4	8	12
3	16	40	56
4	64	168	232
5	256	680	936
Suite	A000302 (puissances de 4)	non répertoriée — suite candidate	non répertoriée — suite candidate

Formules :

- Tn = 4^(n-1)
- In = 8 × (4^(n-1) - 1) / 3 = 8 × On
- Sn = Tn + In = (11 × 4^(n-1) - 8) / 3

Récurrences :

- T(n+1) = 4 × Tn avec T1 = 1
- I(n+1) = In + 8 × Tn avec I1 = 0
- S(n+1) = 4 × Sn + 8 avec S1 = 1

Autres subdivisions : comptage si tous les tétraèdres étaient subdivisés (réguliers et irréguliers)

Les tétraèdres issus de l'octaèdre peuvent encore être subdivisés, mais en ne produisant plus de structures régulières, ces configurations ne sont pas analysées dans cette démarche. La première qui apparaît est conçue avec l'hypothèse que chaque tétraèdre (régulier ou irrégulier) se subdivise en 12 éléments (4 + 8), soit n1=1, n2=12, n3=144, n4=1728, n5=20736, avec la formule Rn = 12^(n-1). Enregistrée OEIS A001021. Quoiqu'on puisse envisager cette subdivision géométrique, elle n'est pas réalisable, car les tétraèdres irréguliers issus de l'octaèdre ne produisent pas de nouvelles figures régulières.

Synthèse des suites retenues

Cette approche met en évidence qu'il existe des correspondances entre les configurations géométriques et des suites déjà enregistrées sur OEIS.org L'une (A000302) correspond au décompte de la division systématique des tétraèdres réguliers, laissant les octaèdres centraux ; une autre correspond aux décomptes des seuls octaèdres, selon que l'on considère commencer sans rien (le tétraèdre de départ ne montrant pas l'octaèdre =0 : A002450 (décalée)) ou que l'on considère que l'on commence directement au premier octaèdre (A002450).

Dans la logique de l'approche, on ne peut pas négliger la suite déclenchée par les seuls tétraèdres irréguliers (nouvelle JLL.1) et celle qui additionne l'ensemble des tétraèdres réguliers et irréguliers (nouvelle JLL.2).

Suite	Formule	Termes	OEIS
Tétraèdres réguliers	4^(n-1)	1, 4, 16, 64, 256, ...	A000302
Octaèdres	(4^(n-1) - 1) / 3	0, 1, 5, 21, 85, ...	A002450 (décalée)
Éléments (T+O)	(4^n - 1)/3	1, 5, 21, 85, 341, ...	A002450
Tétraèdres irréguliers	8 × (4^(n-1) - 1) / 3	0, 8, 40, 168, 680, ...	nouvelle JLL.1
Tétraèdres (T+I)	(11 × 4^(n-1) - 8) / 3	1, 12, 56, 232, 936, ...	nouvelle JLL.2

Interprétation géométrique

La subdivision tétraédrique illustre un processus fractal où :

- Les **tétraèdres réguliers** se multiplient par 4 à chaque niveau
- Les **octaèdres** (ou leurs 8 tétraèdres irréguliers) s'accumulent sans se subdiviser
- Le rapport tétraèdres réguliers / irréguliers tend vers 0 quand n→∞n \to \infty n→∞

À la limite, la structure est dominée par les tétraèdres irréguliers issus des octaèdres successifs.

Relations entre les suites

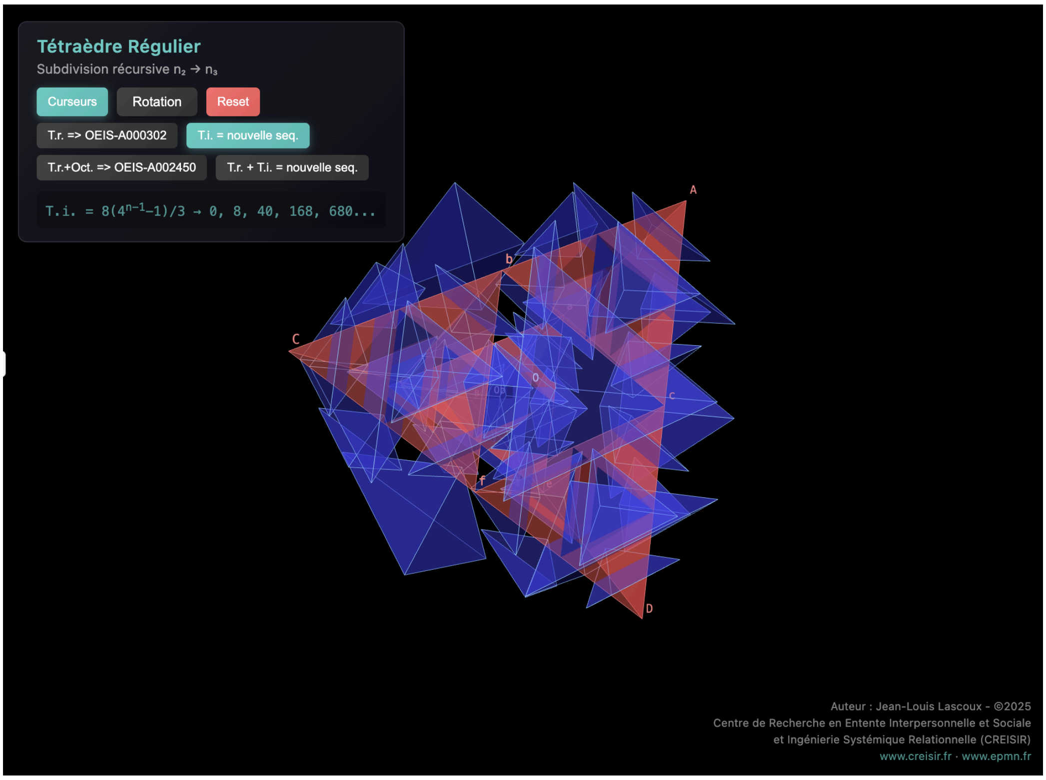
- In = 8 × On
- En = Tn + On
- Sn = Tn + In = Tn + 8 × On = En + 7 × On
- Sn = 8 × En - 7 × Tn

Deux nouvelles suites

A391597	Tétraèdres irréguliers	
	Nombre de tétraèdres irréguliers après n subdivisions récursives d'un tétraèdre régulier par milieux des arêtes.	Number of irregular tetrahedra after n recursive subdivisions of a regular tetrahedron by edge midpoints.
DATA	0, 8, 40, 168, 680, 2728, 10920, 43688, 174760, 699048, 2796200, 11184808, 44739240, 178956968, 715827880	

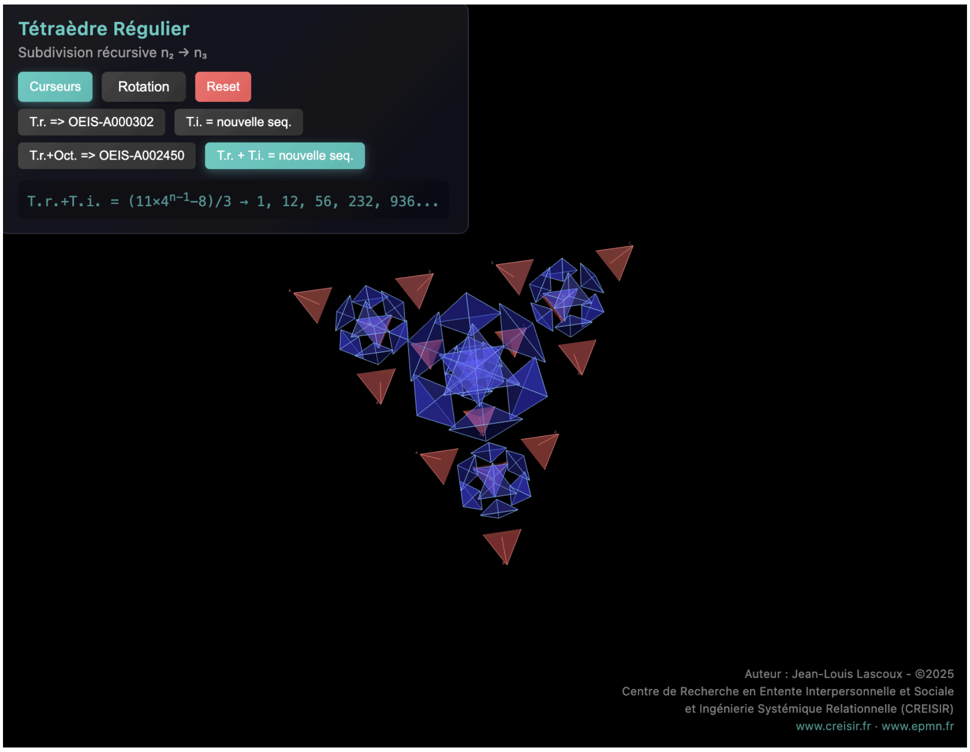
OFFSET	1,2	
COMMENTS	La subdivision d'un tétraèdre régulier par connexion des milieux de ses 6 arêtes produit 4 tétraèdres réguliers aux sommets et 1 octaèdre central. L'octaèdre se décompose en 8 tétraèdres irréguliers partageant un sommet commun au centre. Seuls les tétraèdres réguliers sont subdivisés récursivement. Les tétraèdres irréguliers s'accumulent à chaque niveau. a(n) = 8 * A002450(n-1) pour n >= 1.	Subdividing a regular tetrahedron by connecting the midpoints of its 6 edges produces 4 regular tetrahedra at the vertices and 1 central regular octahedron. The octahedron decomposes into 8 irregular tetrahedra sharing a common vertex at its center. Only regular tetrahedra are recursively subdivided. Irregular tetrahedra accumulate at each level. a(n) = 8 * A002450(n-1) for n >= 1.
LINK	b-fil-A391597 Subdivided tetrahedron	Subdivided tetrahedron
FORMULA	a(n) = 8 * (4^(n-1) - 1) / 3. a(n) = (8/3) * (4^(n-1) - 1). a(n) = 4*a(n-1) + 8 pour n >= 2, avec a(1) = 0. G.f.: 8*x^2 / ((1-x)*(1-4*x)).	a(n) = 8 * (4^(n-1) - 1) / 3. a(n) = (8/3) * (4^(n-1) - 1). a(n) = 4*a(n-1) + 8 for n >= 2, with a(1) = 0. G.f.: 8*x^2 / ((1-x)*(1-4*x)).
EXAMPLE	a(1) = 0 : le tétraèdre initial n'a pas de tétraèdre irrégulier. a(2) = 8 : la première subdivision produit 1 octaèdre = 8 tétraèdres irréguliers. a(3) = 40 : les 4 tétraèdres réguliers de n=2 produisent 4*8 = 32 nouveaux irréguliers, plus les 8 existants = 40.	a(1) = 0: the initial tetrahedron has no irregular tetrahedra. a(2) = 8: the first subdivision produces 1 octahedron = 8 irregular tetrahedra. a(3) = 40: the 4 regular tetrahedra from n=2 produce 4*8 = 32 new irregular ones, plus the 8 existing = 40.

MATHEMATICA	Table[8*(4^(n-1) - 1)/3, {n, 1, 20}]	
PROG	(PARI) a(n) = 8*(4^(n-1) - 1)/3; (Python) def a(n): return 8 * (4**(n-1) - 1) // 3	
CROSSREFS	Cf. A000302 (tétraèdres réguliers = 4^(n-1)). Cf. A002450 (octaèdres = (4^(n-1) - 1)/3). Cf. **A391598** (total tétraèdres réguliers + irréguliers).	Cf. A000302 (regular tetrahedra = 4^(n-1)). Cf. A002450 (octahedra = (4^(n-1) - 1)/3). Cf. **A391598** (total regular + irregular tetrahedra).
KEYWORD	nonn,easy	
AUTHOR	Jean-Louis Lascoux	
EXTENSIONS		



A391598	**Total Tétraèdres réguliers + irréguliers**	
NAME	Nombre total de tétraèdres (réguliers + irréguliers) après n subdivisions récursives d'un tétraèdre régulier par milieux des arêtes.	Total number of tetrahedra (regular + irregular) after n recursive subdivisions of a regular tetrahedron by edge midpoints.
DATA	1, 12, 56, 232, 936, 3752, 15016, 60072, 240296, 961192, 3844776, 15379112, 61516456, 246065832, 984263336	
OFFSET	1,2	
COMMENTS	La subdivision d'un tétraèdre régulier par connexion des milieux de ses 6 arêtes produit 4 tétraèdres réguliers aux sommets et 1 octaèdre central. L'octaèdre se décompose en 8 tétraèdres irréguliers partageant un sommet commun au centre. Total : 12 tétraèdres par subdivision. Seuls les tétraèdres réguliers sont subdivisés récursivement. Les tétraèdres irréguliers s'accumulent. a(n) = A000302(n-1) + **A391597**(n) où **A391597** est la suite des tétraèdres irréguliers. a(n) = 4^(n-1) + 8*(4^(n-1) - 1)/3 = (11*4^(n-1) - 8)/3. Pour n ≥ 2, les termes se terminent par le chiffre décimal **2** lorsque n est pair et par le chiffre **6** lorsque n est impair. Ce cycle alterné 2-6 découle de la relation de récurrence a(n) = 4*a(n-1) + 8 modulo 10 considérée modulo 10.	Subdividing a regular tetrahedron by connecting the midpoints of its 6 edges produces 4 regular tetrahedra at the vertices and 1 central regular octahedron. The octahedron decomposes into 8 irregular tetrahedra sharing a common vertex at its center. Total: 12 tetrahedra per subdivision. Only regular tetrahedra are recursively subdivided. Irregular tetrahedra accumulate. a(n) = A000302(n-1) + **A391597**(n) where **A391597** is the sequence of irregular tetrahedra. a(n) = 4^(n-1) + 8*(4^(n-1) - 1)/3 = (11*4^(n-1) - 8)/3. For n >= 2, the terms end with decimal digit 2 when n is even and 6 when n is odd. This 2-6 cycle follows from the recurrence a(n) = 4*a(n-1) + 8 modulo 10. For n ≥ 2, the last two decimal digits cycle with period 10: 12, 56, 32, 36, 52, 16, 72, 96, 92, 76.

FORMULA	a(n) = (11 * 4^(n-1) - 8) / 3. a(n) = 4*a(n-1) + 8 pour n >= 2, avec a(1) = 1. a(n) = A000302(n-1) + 8*A002450(n-1). G.f.: (1 + 8*x) / ((1-x)*(1-4*x)).	a(n) = (11 * 4^(n-1) - 8) / 3. a(n) = 4*a(n-1) + 8 for n >= 2, with a(1) = 1. a(n) = A000302(n-1) + 8*A002450(n-1). G.f.: (1 + 8*x) / ((1-x)*(1-4*x)).
LINK	b-fil-A391598 Subdivided tetrahedron	Subdivided tetrahedron
EXAMPLE	a(1) = 1 : le tétraèdre initial. a(2) = 12 : 4 tétraèdres réguliers + 8 irréguliers. a(3) = 56 : 16 tétraèdres réguliers + 40 irréguliers. a(4) = 232 : 64 tétraèdres réguliers + 168 irréguliers.	a(1) = 1: the initial tetrahedron. a(2) = 12: 4 regular tetrahedra + 8 irregular tetrahedra. a(3) = 56: 16 regular tetrahedra + 40 irregular tetrahedra. a(4) = 232: 64 regular tetrahedra + 168 irregular tetrahedra.
MATHEMATICA	Table[(11*4^(n-1) - 8)/3, {n, 1, 20}]	
PROG	(PARI) a(n) = (11*4^(n-1) - 8)/3; (Python) def a(n): return (11 * 4**(n-1) - 8) // 3	
CROSSREFS	Cf. A000302 (tétraèdres réguliers = 4^(n-1)). Cf. A002450 (octaèdres = (4^(n-1) - 1)/3). Cf. **A391597** (tétraèdres irréguliers = 8*(4^(n-1) - 1)/3).	Cf. A000302 (regular tetrahedra = 4^(n-1)). Cf. A002450 (octahedra = (4^(n-1) - 1)/3). Cf. **A391597** (irregular tetrahedra = 8*(4^(n-1) - 1)/3).
KEYWORD	nonn,easy	
AUTHOR	Jean-Louis Lascoux	



Conclusion

Cette analyse démontre le potentiel d'une démarche qui part d'une structure concrète, l'une des plus simples, en extrait les logiques sous-jacentes et les confronte aux connaissances existantes.

Le tétraèdre, objet géométrique élémentaire, révèle des progressions numériques dont certaines étaient déjà répertoriées, d'autres non.

Ce modèle de raisonnement — observer, décomposer, formaliser, vérifier — s'applique au-delà de la géométrie. Il constitue le socle méthodologique de l'ingénierie systémique relationnelle.